

2022年度共同利用研究報告書

2023年05月19日

所属・職名 北海道大学・大学院理学研究院・数学部門・准教授

黒田 紘敏

		整理番号	2022a028	
1.研究計画題目	幾何学的離散力学の産業への応用に向けた数理科学の基礎			
2.新規・継続	新規			
3.種別	一般研究			
4.種目	短期共同研究			
5.開催方法	ハイブリッド開催			
6.研究代表者	氏名	黒田 紘敏		
	所属 部局名	北海道大学・大学院理学研究院・ 数学部門	職 名	准教授
7.研究実施期間	2023年01月21日(土曜日)～2023年01月22日(日曜日)			
8.キーワード	幾何学的離散力学, 有限要素外積, 構造保存型数値解法, 数値解析			
9.参加者人数	41人			

10.本研究で得られた成果の概要

本共同研究は、参加者の1人である田上らが取り組んでいる電磁場問題の数値計算手法の開発が幾何学的離散力学や有限要素外積との関連が深いため、これらの手法の数学的な観点からの基礎的な理解を進めた上で、新しい産業応用が可能な、より頑強な数値計算手法開発の可能性を探るために企画した。その結果、本共同研究で行われた議論を元に、参加者の1人である正宗らが取り組んでいる均質化法と講演者の1人である深川らが取り組んでいる離散微分形式とを融合し、産業応用が可能な数理モデルと数値計算手法を開発する計画を開始した。その手始めとして、例えば電子デバイス設計への応用を視野に入れた電磁場問題に対する数値計算手法の開発を目的とした共同研究を立ち上げ、次年度の九州大学IMI共同利用研究計画を提案・申請し、継続が認められた。現在、受理された共同研究計画の実施内容を検討する中で、本共同研究における議論が有効に活用されている。

2022年度 IMI 共同利用研究 報告

研究計画題目: 幾何学的離散力学の産業への応用に向けた数理科学の基礎

整理番号: 2022a028

研究代表者: 黒田 紘敏 (北海道大学・大学院理学研究院・准教授)

研究実施期間: 2023年1月21日(土)~2023年1月22日(日)

1 背景と目的

有限要素外積解析は、ある種の楕円型方程式に対して適合的かつ安定な混合型有限要素法を定式化し、その誤差評価を与えるための統一的な枠組みであり、2006年頃に Aronold–Falk–Winther らが中心となって提案した。

近年、有限要素外積解析の他にも、物理現象の数理モデルや偏微分方程式の数値解法に微分形式を取り入れる試みは、1966年に Branin によって著された論文を端緒に、数値流体力学や計算電磁気学を始めとする様々な分野で盛んに行われている。数値流体力学の分野では、安定性に優れたスキームを開発するために離散化後にもある種のエネルギー評価が成り立つような離散化方法が提案されており、例えば微分形式との対応が明らかにされたミメティック離散化法がある。計算電磁気学の分野では、高周波解析などで有効である辺要素有限要素法が Maxwell 方程式の微分幾何学的な構造と関係していることが Bossavit によって指摘され、得られた知見を元に現在も発展を続けている。離散力学の分野では、力学の幾何学的な記述法に対応する離散版の理論を構築するため、Hirani らによって離散外積解析が開発され、例えばコンピュータグラフィックスなど他の分野への応用も展開されている。

数理モデルや数値計算手法に微分形式を取り入れることで、例えば“流れ”に現れる flow (1形式) と flux (2形式) とを区別して取扱うことが可能となり、空間と物理量の関係がより明確になる、という利点がある。この利点は、実際に我々が観測可能な測定器を通した観測結果 (flux に相当) を数理モデルの中で扱う際の道具にもなる。この考え方は工学的にも取り入れられ、優れた数値解法が開発されている。分野によってばらつきはあるものの、離散外微分解析、離散微分幾何学、差分形式、ベクトル差分解析など、適用される分野に応じて様々な名前では呼ばれている。

以上の背景を元に、本短期共同研究は、微分形式を考慮した数値計算手法の一つとして有限要素外積を取り上げ、その数学的基礎に関する知見を獲得し、産業界における具体的

なニーズに数学の立場からどのような貢献が可能かを議論するために企画した。

2 実施状況

前節で述べた背景を元に、本短期共同研究では、微分形式を考慮した数値計算手法の一つとして有限要素外積を取り上げ、まず関連する業績のある神戸大学の谷口氏に講師を依頼し、その数学的基礎を概説頂き、参加者への浸透を図った。

続いて、産業界から参加頂いた DeepFlow の深川氏らに、有限要素外積に対して産業界から期待される具体的なニーズや、実際に有限要素外積および関連する離散微分形式を用いた数値計算手法の概略を解説頂くことで、数学の立場からの貢献可能性などについて議論を行った。

最後に参加者が全員参加した自由討論の場を設けて、谷口氏や深川氏の講演に直接関連する学術的内容や、今回の共同利用を元にした今後の研究の展開などについて議論を行った。

3 得られた成果

物理現象の数値モデルや偏微分方程式の数値解法に微分形式を取り入れる試みが、数学的に整った枠組みを提供できていること、産業界に現れる具体的な数値計算に有効であること、の 2 点が、3 名の講師の講演から参加者の間で共有することが出来た。

これを受けて、産学それぞれに所属する参加者が持っているニーズへの適用可能性を議論した。その結果、複数の参加者が興味を持つ均質化法と微分形式を用いた数理モデルとの融合を進めていくとの議論があった。例えば電子デバイスの設計などにおいて、産業界には周期的な微細構造を内部に含む製品が多く見られる。自由討論の場で、これら周期的な微細構造を持つ製品の設計を行うために、均質化法と微分形式を用いた数理モデルとの融合に基づいて最適化を行うことの検討がなされた。

そこで、本 IMI 共同利用短期共同研究を継続し、まずは微分形式を用いた数理モデルの定式化について議論を深めること、次に微分形式を用いた数値計算手法の理解を深めること、最後に均質化法の概略を共有することでその基礎的な数学知識を深めること、の 3 点を計画するとの結論に至った。

その後、今回の参加者の 1 人である東北大学の正宗氏を中心とした研究組織を立ち上げて IMI 共同利用短期共同研究に応募し、採択され、上記の研究計画を推進していくことが、参加者の間で確認された。なお応募が採択され、継続課題として共同研究を引き続き進め

ていくことも本共同研究の成果の1つである。さらに、本共同研究では複数の産業界および他分野からの参加者がいることから、単に微分形式を用いた数理モデルの定式化と数値計算手法の提案において、数学的な厳密性を追い求めるだけでなく、産業界への応用可能性についても議論できている点が、IMI 共同利用の目的に良く合致している点にも触れておきたい。

開催日：2023/01/21～2023/01/22

幾何学的離散力学の産業への応用に向けた数理科学の基礎 | 共2022a028

カテゴリ：イベント

タグ：

一般研究

短期共同研究

開催概要

- 開催方法：九州大学 伊都キャンパスとZoomミーティングによるハイブリッド開催
- 場所：九州大学 伊都キャンパス ウェスト1号館 D棟 4階 IMIオーデトリウム (W1-D-413)
- 主要言語：日本語
- 主催：九州大学マス・フォア・インダストリ研究所
- 研究課題題目：幾何学的離散力学の産業への応用に向けた数理科学の基礎
- 研究代表者：黒田 紘敏（北海道大学・大学院理学研究院・数学部門・准教授）
- 研究実施期間：2023年1月21日（土）～ 2023年1月22日（日）
- 公開期間：2023年1月21日（土）～ 2023年1月22日（日）
- 研究計画詳細：https://joint1.imi.kyushu-u.ac.jp/research_choices/view/2022a028

プログラム

1月21日（土）

10:00-11:30

13:30-15:00

谷口 隆晴 (神戸大学大学院 システム情報学研究科)

有限要素法と有限要素外積解析の基礎

要旨: 有限要素外積解析は、ある種の楕円型偏微分方程式に対して、有限要素法による数値計算法を導出する枠組みであり、特に、数値計算法の安定性や適合性が、Hodge理論を用いて保証される。本講演では、この枠組みの概要について、有限要素法の基礎と共に説明する。

(午後に非公開あり)

1月22日（日）

10:00-11:30

13:30-15:00

谷口 隆晴 (神戸大学大学院 システム情報学研究科)

有限要素法と有限要素外積解析の基礎

15:15-17:15

深川 宏樹 (DeepFlow株式会社 代表取締役社長)

微分形式による物理方程式の記述と離散微分形式によるシミュレーションについて

要旨: 解析力学は微分形式で表せ、散逸系に拡張できる。微分形式で記述された物理方程式は、離散微分形式に自然に変換できる。この手順を示し、この離散化をつかったシミュレーションを紹介する。